

透視図の世界

3時間目

私たちの数学で探究(2)

授業者：筑波大学大学院教育研究科1年
丸野 悟

今回は皆さんがよく利用している“座標”を使って、“点”や“直線”，特に“互いに平行である複数の直線”がどのような透視図に描かれるかを調べてきました。計算等が面倒で大変だったと思いますので，簡単に内容のおさらいをしたいと思います。ページはそのままで・・・。

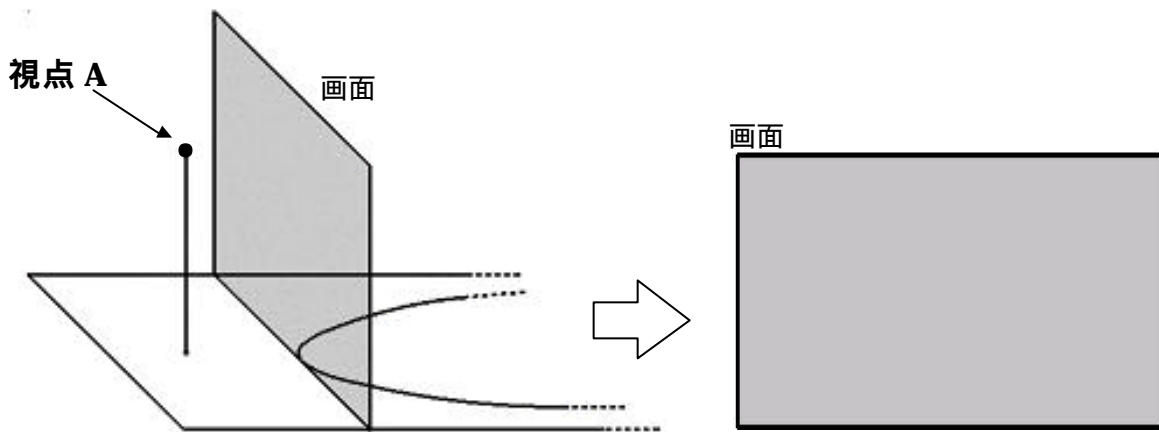


前回のおさらい

前回は平行な直線の見え方について探究しましたが、曲線の場合はどうでしょうか。今回は私たちの身近な曲線“放物線”にスポットをあてて探究してみましょう。

§ 1 . 放物線はどう見える？

下図のように視点 A の位置から放物線を見て、その透視図を画面上に描くとします。



問 1

画面上には放物線がどのように見えているか予想し、右上図に描き込んでみよう。

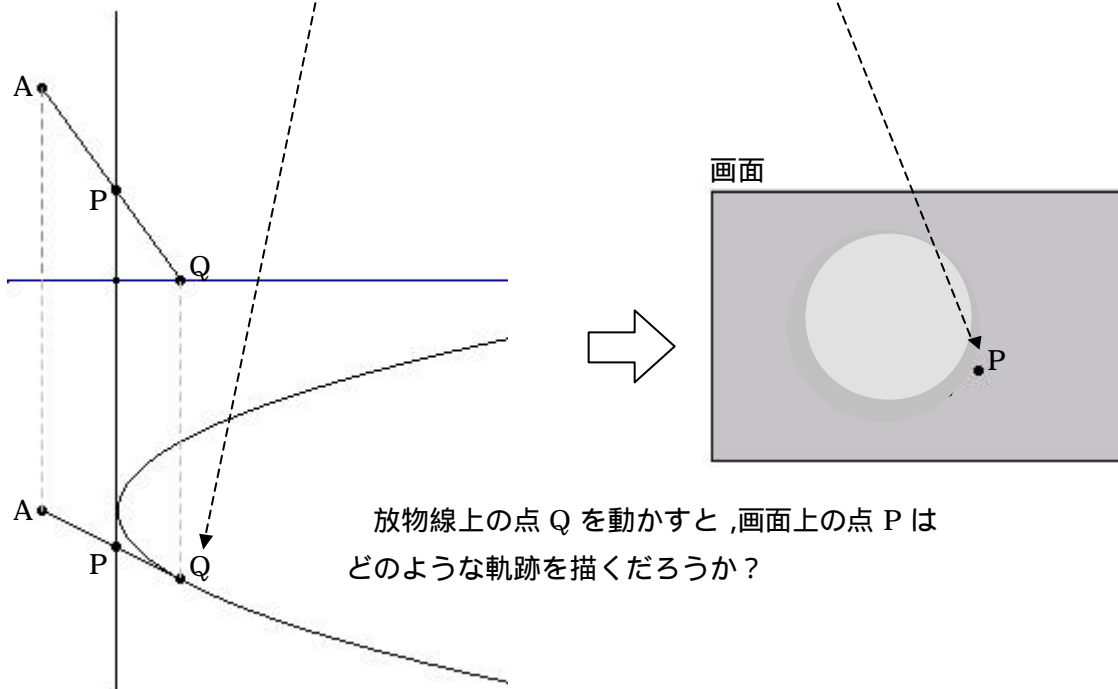
実際には、無限に広がる放物線を描くことはとても困難です。そこで・・・

問2

Cabri Geometry を使って実験してみよう。

各自フロッピーディスクの、「3時間目」のフォルダー内から“放物線1”を開いてください。

活動 放物線上の点Qをドラッグし、画面上の点Pのトレースをとろう。



Cabri Geometry の操作でわからないことがあったら、遠慮なく聞いてください。

§ 2 . 計算で解を求めてみよう。

問3

x y 平面上の放物線の方程式を $y = x^2$ として, 点 P の軌跡の方程式を求めよう。

前回求めた “ 点の見える位置を求める式[イ],[オ] ” を使って, 点 P の軌跡の方程式を求めよう。

[イ], [オ]式を s , t について解くと,

$$\begin{cases} s = \frac{2x}{2-z} \dots \\ t = \frac{z}{2-z} \dots \end{cases}$$

[イ], [オ]式については右ページを参照。

である。

点Qが放物線 $y = x^2$ 上にあるとき, s , t は関係式 $t = s^2 \dots$

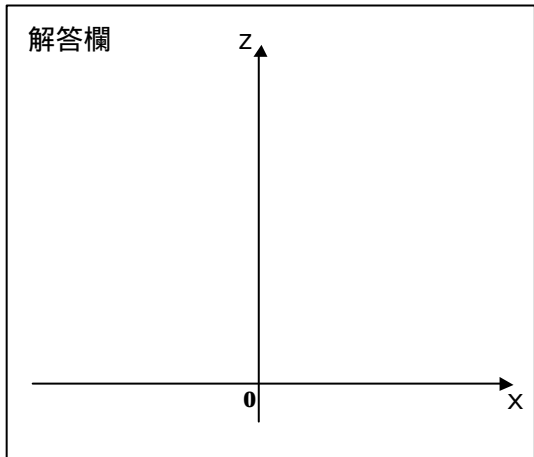
を満たす。よって, を に代入して計算すると...

< 計算欄 >

よって画面上の点 P の描く軌跡の方程式は

.....[コ]

この図形は[サ]であり, その概形は右のようになる。

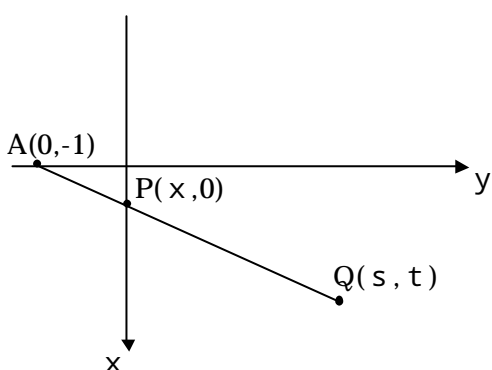


前回の授業資料の4ページの内容を載せておきます。どんな内容だったか忘れてしまった方はどうぞ。

まず視点を A とし, その位置を次のように定めることにする。

画面との距離が1で, 高さが2である位置。

x y 平面 (真上から見たところ)



視点 A の座標は $A(0, -1)$ とおける。点 Q の座標を $Q(s, t)$ とおくと, 2点 A, Q を通る直線の方程式は

$$y = \frac{t+1}{s}x - 1 \quad \dots [ア]$$

であるから, この直線と x 軸との交点 P

の x 座標は $x = \frac{s}{t+1} \quad \dots [イ]$

である。

視点 A の座標は $A(-1, 2)$ とおける。点 Q の座標は $Q(t, 0)$ $\dots [ウ]$ であり, 2点 A, Q を通る直線の方程式は

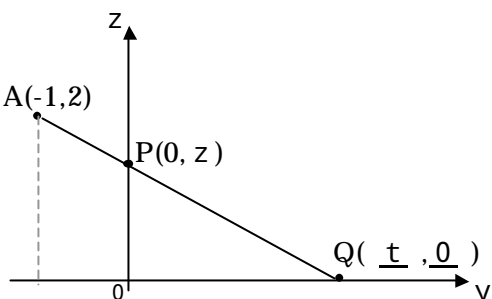
$$z = -\frac{2}{t+1}y + \frac{2t}{t+1} \quad \dots [エ]$$

であるから, この直線と z 軸との交点 P

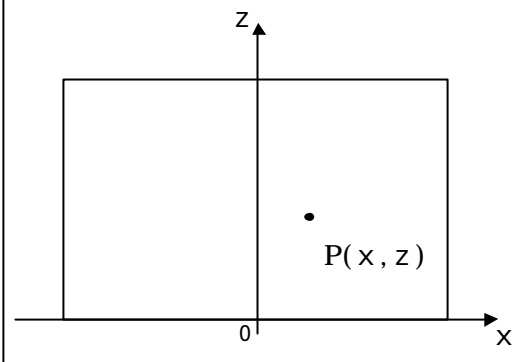
の z 座標は $z = \frac{2t}{t+1} \quad \dots [オ]$

である。

y z 平面 (真横から見たところ)



x z 平面 (透視図を描く画面)



ここで, 透視図を描く画面は x z 平面であるから, [イ],[オ]より画面上の点 P の座標 (即ち点 Q の見える位置) は s, t を用いて

$$P\left(\frac{s}{t+1}, \frac{2t}{t+1}\right) \quad \dots [カ]$$

と表すことができる。

これで, 点 $Q(s, t)$ の座標を具体的に与えれば, その透視図である点 P の位置が求められるようになった。

問4

$y = x^2$ 以外の方程式で表される放物線についてはどうだろうか。

Cabri Geometry を使って実験してみよう。

フロッピーディスクの、「3時間目」のフォルダー内から

“放物線2 - 1 , 2 - 2 , 2 - 3” “放物線3” を

近くの座席の人たちで、分担して開いてください。

各自自分のファイルで実験したら、近くの人たちと情報を交換し合ってください。

3時間目の授業，お疲れ様でした。今回の授業内容を振り返って，皆さんの感想を聞かせてください。

Cabri Geometry を使って探究したことについての感想。

3時間目の感想（どんなことでもよいので自由に書いてください。）

ありがとうございました。